Weiterbildungskolleg der Bundesstadt Bonn
Abendgymnasium und Kolleg

Schulinterner Lehrplan zum Kernlehrplan für das Abendgymnasium und Kolleg in Nordrhein-Westfalen

Mathematik

Stand: Februar 2017

Inhalt

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Das Weiterbildungskolleg (WbK) und Abendgymnasium (AG) der Bundesstadt Bonn ist eine Einrichtung des Zweiten Bildungswegs. Es ermöglicht Erwachsenen Schulabschlüsse nachzuholen. Nach dem 4. Semester kann der Fachhochschulreifeabschluss (schulischer Teil) erreicht werden, nach dem 6. Semester die Allgemeine Hochschulreife.

Die Hauptstelle in Bonn **bietet im Sekundar-II-Bereich die Bildungsgänge** Kolleg, Abendgymnasium und abitur-online.nrw (aol) an, die Außenstelle in Euskirchen das Abendgymnasium und abitur-online.nrw. Je nach Eingangsvoraussetzungen und persönlicher Planung entscheiden sich die Studierenden für einen der Bildungsgänge bei der Anmeldung.

Die **Lebenswelt der Studierenden im zweiten Bildungsweg** ist oftmals durch folgende Aspekte gekennzeichnet:

- Viele Studierende wohnen nicht mehr im Elternhaus, sondern in einer eigenen Wohnung bzw. in einer Wohngemeinschaft. Sie erhalten meist BAföG und/oder üben eine geringfügige Beschäftigung aus.
- Die Studierenden des Abendgymnasiums besuchen den Unterricht parallel zu einer beruflichen Tätigkeit.
- Für viele Studierende ist Deutsch nicht die Herkunftssprache.

D.h.: Die Studierenden des Weiterbildungskollegs Bonn zeigen die für Weiterbildungskollegs **typischen heterogenen Bildungs- und Berufsbiographien**. Ein einheitlicher Kenntnis- und Bildungsstand bezüglich des Faches Mathematik ist je nach Bildungsbiographie nur in Ansätzen gegeben. Hinzu kommt, dass neben Absolventen der verschiedenen deutschen Bildungsgänge in der Sekundarstufe I und den Berufskollegs auch Zuwanderer mit anerkannten ausländischen Bildungsabschlüssen die Einführungs- und Qualifikationsphase besuchen.

Mit den daraus resultierenden Unterschieden in den fachspezifischen Voraussetzungen korrespondieren Unterschiede in den allgemeinen sprachlichen Kompetenzen. Das hat **Einfluss auf die Auswahl von geeignetem Arbeitsmaterial** und erfordert entsprechende Unterrichtsmethoden.

In der Einführungsphase ist eine hohe Abbrecherquote festzustellen. Durch berufliche und familiäre Zwänge entstehen Verspätungen und Fehlzeiten bei einzelnen Studierenden. Die **Unterrichtsgestaltung muss sich auf diese Rahmenbedingungen einrichten.**

Allen Studierenden steht ein Selbstlernzentrum mit Internetzugang zur Verfügung. Dort können eigenständige Recherchen und rechnergestützte Präsentationen für den Unterricht erarbeitet und vorbereitet werden.

Das Weiterbildungskolleg Bonn versteht sich als Schule, in der gegenseitige Wertschätzung die Grundlage des gemeinsamen Lernens, Lehrens und Erlebens ist. Studierende, Lehrerinnen, Lehrer gehen respektvoll miteinander um. Dieser Respekt ist keiner Hierarchie geschuldet, sondern entsteht aus gegenseitiger Achtung. Dazu gehört, sich aufmerksam wahrzunehmen, sich auf Augenhöhe zu begegnen und eigene Grenzen und die Grenzen des Gegenübers anzuerkennen.

Im Zentrum der Arbeit steht der Unterricht mit berufstätigen Erwachsenen, die die Voraussetzungen für ein Studium erreichen wollen. Die Schule berücksichtigt den Erwachsenenstatus, die Berufstätigkeit und die Mehrfachbelastung der Studierenden angemessen und unterscheidet sich auch darin von der Regelschule.

Die **Einführungsphase** ist daher von besonderer Bedeutung, weil hier der Übergang aus einer bereits ausgeübten Erwerbstätigkeit oder aus dem Bildungsgang der Abendrealschule (ARS) erfolgt. **Häufig auftretende Übergangsprobleme sind:** ein von den Studierenden als zu schnell empfundenes Lerntempo bzw. Anforderungen, die als zu hoch eingeschätzt werden, eine nicht vertraute Lernkultur oder eine Gruppendynamik innerhalb des neuen Klassenverbandes, in die sich die Studierenden nicht eingebunden fühlen. Um die Anschlussfähigkeit der Studierenden sicher zu stellen, wird versucht, das Lerntempo der Lerngruppe anzupassen, die Unterrichtsinhalte stofflich zu entlasten sowie Methoden zur Förderung der Basiskompetenzen durchzuführen und den Klassenverband zu stärken.

Das Fach Mathematik wird im **Vorkurs**, wie auch in den ersten beiden Semestern der Einführungsphase aller Bildungsgänge (Kolleg, Abendgymnasium und abitur-online) vierstündig (2 Blöcke à 90 Minuten) unterrichtet und gehört zum Pflichtunterricht. Zusätzlich werden im Vorkurs zwei Stunden **Förderunterrich**t und **in den ersten beiden Semestern** zwei Stunden Unterricht in **Vertiefungskursen** angeboten, um vorhandene Lücken und Unsicherheiten auszugleichen.

In der **Qualifikationsphase** kann im Kolleg das Fach Mathematik entweder als Leistungskurs (5-stündig) oder als Grundkurs (3-stündig) belegt werden. Insgesamt werden zu Beginn der Qualifikationsphase in der Regel ein Leistungskurs und mehrere Grundkurse eingerichtet. Nach dem ersten Jahr der Qualifikationsphase verlassen einige Studierende mit Fachabitur die Schule, so dass **Grundkurse zusammengelegt** werden können. Als Unterstützungsangebot für leistungsschwächere Studierende und Quereinsteiger kann im ersten Semester der Qualifikationsphase ebenfalls ein zweistündiger **Vertiefungskurs** belegt werden. In den Bildungsgängen Abendgymnasium und abitur-online wird Mathematik an beiden Standorten in der Qualifikationsphase nur als Grundkurs (3-stündig) angeboten.
Im Bildungsgang **abitur-online** werden die Unterrichtsstunden in allen Semestern in einer Präsenz- und einer Distanzphase aufgeteilt. In der Distanzphase arbeiten Studierende und Lehrer auf der Plattform *moodle* in einem virtuellen Klassenraum. Dies macht eine besondere didaktisch-methodische Aufbereitung der Lerninhalte in allen Semestern notwendig.

Ab 2017 wird im Mathematikabitur ein grafikfähiger Taschenrechner vorausgesetzt (Erlass des MSW vom 27.06.2012). Die Schulkonferenz hat daher auf Vorschlag der Fachkonferenz Mathematik beschlossen, ab der Einführungsphase mit dem GTR (CASIO fx-CG 20) zu arbeiten. Der Taschenrechner kann im Rahmen einer Sammelbestellung, die zu Beginn eines jeden Semesters über die Schule organisiert wird, zu einem Preis von ca. 84 € erworben werden.

Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht sind den Studierenden weitgehend unbekannt, sodass es zur besonderen Aufgabe aller Fachlehrkräfte gehört, die Studierenden für das Arbeiten damit zu befähigen. In den Klassenräumen stehen in ausreichendem Umfang Beamer oder interaktive Tafeln zur Verfügung.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Der schulinterne Lehrplan gilt für das **Schuljahr 2015/16.** Eine Überarbeitung erfolgt nach **Evaluation** in der Fachkonferenz am Ende des Schuljahres im Juni 2016.

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Studierenden Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „**Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“** (Kapitel 2.1.1) wird die **Verteilung der Unterrichtsvorhaben** dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz **verbindlich** für die Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase.
Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene **konkretisierter Unterrichtsvorhaben** Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Bedürfnisse und Interessen der Studierenden oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Die im **Übersichtsraster festgelegte Reihenfolge der Unterrichtsvorhaben**, die Zuordnung zu den Semestern und die Schwerpunkte der Unterrichtsvorhaben, wie auch die Verknüpfung von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen sind laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für alle Kolleginnen und Kollegen vereinbart (vgl. Kapitel 2.1.2).

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „**konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter**. Neuen Kolleginnen und Kollegen sowie Referendarinnen und Referendaren dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktischmethodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

Die folgende Übersicht gibt die Reihenfolge der Unterrichtsvorhaben, Themen und Kompetenzen für den zeitlichen Ablauf am Weiterbildungskolleg Bonn verbindlich an. Die Termine für Klausuren und inhaltliche Schnittstellen werden jeweils abhängig von der Semesterlänge festgelegt.
Die Konkretisierungen zu den einzelnen Unterrichtsvorhaben in Kapitel 2.1.2 sind hingegen nach Inhaltsfeldern zusammengestellt.

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase			
Unterrichtsvorhaben	Thema	Kompetenzen	Stundenzahl
E-S1	*Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen*	Modellieren Werkzeuge nutzen	14
E-S2	*Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten*	Modellieren Kommunizieren	12
E-A1	*Der Begriff der Funktion – Graphen lesen und interpretieren*	Argumentieren Kommunizieren	12
E-A2	*Beschreibung der Eigenschaften quadratischer Funktionen und deren Nutzung im Kontext*	Modellieren Problemlösen Werkzeuge nutzen	12
G1	*Lineare Gleichungssysteme und ihre Einsatzmöglichkeiten*	Problemlösen Werkzeuge nutzen	10
E- A3	*Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext*	Modellieren Problemlösen Werkzeuge nutzen	12
E-A4	*Ganzrationale Funktionen analysieren – Graphen in Anwendungskontexten interpretieren*	Argumentieren Werkzeuge nutzen	10
E-A5	*Von der durchschnittlichen Änderungsrate zur Ableitungsfunktion*	Kommunizieren Argumentieren	10
		Summe:	92

Hinweis: Da in der Einführungsphase ein erhöhter Bedarf an Wiederholungen, Vertiefungen und individueller Förderung vorliegt, wurden hier ausgehend von vier Unterrichtsstunden Mathematik pro Woche deutlich weniger als 75% der Bruttounterrichtszeit verplant. Da die Unterrichtsinhalte der Qualifikationsphase sehr umfangreich sind ist darauf zu achten, dass alle im Raster eingeplanten Vorhaben auch bis zum Ende der Einführungsphase durchgeführt und eingeübt wurden.

Qualifikationsphase Grundkurs			
Unterrichtsvorhaben	Thema	Kompetenzen	Stundenzahl
Q-GK-A1	*Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extrem- und Wendestellen*	Problemlösen Argumentieren	16
Q-GK-A2	*Modellierungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen (Steckbriefaufgaben)*	Modellieren Werkzeuge nutzen	4
Q-GK-A3	*Extremalprobleme*	Modellieren Problemlösen	8
Q-GK-A4	*Integralrechnung*	Argumentieren Problemlösen Werkzeuge nutzen	16
Q-GK-A5	*Exponentialfunktionen in Anwendungen*	Argumentieren Kommunizieren Werkzeuge nutzen	16
Q-GK-G1	*Mathematik in 3D - Nutzung von Vektoren*	Kommunizieren Werkzeuge nutzen	10
Q-GK-G2	*Skalarprodukt- eine neue Rechenart und ihr Nutzen*	Modellieren Problemlösen	6
Q-GK-G3	*Geraden in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden*	Modellieren Werkzeuge nutzen	8
Q-GK-G4	*Ebenen in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen*	Kommunizieren Argumentieren	8
Q-GK-G5	*Untersuchung geometrischer Körper – Welche Lösungsstrategien sind hilfreich?*	Problemlösen Werkzeuge nutzen	8
Q-GK-S1	*Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen*	Modellieren Werkzeuge nutzen	8

Q-GK-S2	*Treffer oder nicht? - Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen*	Problemlösen Kommunizieren	12
Q-GK-S3	*Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen*	Argumentieren Werkzeuge nutzen	6
Q-GK-S4	*Von Übergängen und Prozessen*	Modellieren Werkzeuge nutzen	10
Q-GK-A6	*Vertiefung und Vernetzung*	Argumentieren Werkzeuge nutzen	10
		Summe:	146

Qualifikationsphase Leistungskurs			
Unterrichtsvorhaben	Thema	Kompetenzen	Stundenzahl
Q-LK-A1	*Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extrem- und Wendestellen*	Problemlösen Argumentieren	20
Q-LK-A2	*Funktionsanpassung (Steckbriefaufgaben)*	Modellieren Werkzeuge nutzen	6
Q-LK-A3	*Extremalprobleme*	Modellieren Problemlösen	10
Q-LK-A4	*Integralrechnung*	Argumentieren Kommunizieren Werkzeuge nutzen	24
Q-LK-A5	*Exponentialfunktionen in Anwendungen*	Problemlösen Argumentieren Werkzeuge nutzen	30
Q-LK-G1	*Mathematik in 3D - Nutzung von Vektoren*	Kommunizieren Werkzeuge nutzen	10
Q-LK-G2	*Skalarprodukt – eine neue Rechenart und ihr Nutzen*	Modellieren Problemlösen	10
Q-LK-G3	*Geraden in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden*	Modellieren Werkzeuge nutzen	10

Q-LK-G4	*Ebenen in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen*	Problemlösen Kommunizieren	20
Q-LK-G5	*Untersuchung geometrischer Körper – Welche Lösungsstrategien sind hilfreich?*	Problemlösen Werkzeuge nutzen	10
Q-LK-S1	*Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen*	Modellieren Werkzeuge nutzen	8
Q-LK-S2	*Treffer oder nicht? - Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen*	Modellieren Problemlösen	12
Q-LK-S3	*Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen*	Argumentieren Werkzeuge nutzen	8
Q-LK-S4	*Der Alltag ist nicht immer diskret*	Kommunizieren Werkzeuge nutzen	8
Q-LK-S5	*Signifikant und relevant – Testen von Hypothesen*	Modellieren Kommunizieren	10
Q-LK-S6	*Von Übergängen und Prozessen*	Modellieren Werkzeuge nutzen	8
Q-LK-A6	*Vertiefung und Vernetzung*	Argumentieren Werkzeuge nutzen	22
		Summe:	226

Die Unterrichtsvorhaben, dargestellt im Übersichtsraster

Einführungsphase

<u>Unterrichtsvorhaben E-S1</u> **Thema:** *Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Zufallsexperimenten simulieren) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Mehrstufige Zufallsexperimente **Zeitbedarf:** 14 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben E-S2</u>* **Thema**: *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Bedingte Wahrscheinlichkeiten **Zeitbedarf:** 12 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben E-A1</u> **Thema**: *Der Begriff der Funktion – Graphen lesen und interpretieren* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Funktionen grafisch und als Wertetabelle darstellen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Verständnis des Funktionsbegriffs – Funktionen und Graphen **Zeitbedarf**: 12 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben E-A2</u>* **Thema:** *Beschreibung von Funktionseigenschaften quadratischer Funktionen und deren Nutzung im Kontext* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Funktionen grafisch und als Wertetabelle darstellen, Parameter von Funktionen variieren, Gleichungen lösen) **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Beschreibung charakteristischer Eigenschaften quadratischer Funktionen • Systematisierung typischer Untersuchungen **Zeitbedarf**: 12 Std.

<u>*Unterrichtsvorhaben E-G1*</u> **Thema**: *Lineare Gleichungssysteme und ihre Einsatzmöglichkeiten* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Gleichungssysteme lösen) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: 10 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben E-A3*</u> **Thema:** *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Funktionen grafisch und als Wertetabelle darstellen, Gleichungen lösen, zielgerichtet Parameter von Funktionen variieren) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Produktion, Beschreibung und Systematisierung von Funktionstypen und deren Graphen sowie Systematisierung typischer Untersuchungen **Zeitbedarf**: 12 Std.

Unterrichtsvorhaben E-A4 **Thema**: *Ganzrationale Funktionen analysieren – Graphen in Anwendungskontexten diskutieren* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Funktionen grafisch und als Wertetabelle darstellen, mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Untersuchung ganzrationaler Funktionen mit Mitteln der graphischen Analyse **Zeitbedarf**: 10 Std.	*Unterrichtsvorhaben E-A5* **Thema**: *Von der durchschnittlichen Änderungsrate zur Ableitungsfunktion* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Funktionen grafisch und als Wertetabelle darstellen, Steigungen grafisch messen, mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Einführung des Ableitungsbegriffs und graphisches Ableiten **Zeitbedarf**: 10 Std.

Qualifikationsphase – GRUNDKURS

<table>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-A1</u>

Thema: Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extremstellen und Wendestellen

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Funktionen als mathematische Modelle
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
• Differentialrechnung

Zeitbedarf: 16 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-A2</u>

Thema: Modellierungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen (Steckbriefaufgaben)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen (Gleichungssysteme lösen)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 4 Std.</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-A3</u>

Thema: Extremalprobleme

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: 8 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-A4</u>

Thema: Integralrechnung

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen (Flächeninhalte zwischen Funktionsgraph und Abszisse messen, den Wert eines bestimmten Integrals ermitteln)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Integralbegriffs
• Integralrechnung

Zeitbedarf: 16 Std.</td>
</tr>
</table>

<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-A5</u> **Thema**: *Exponentialfunktionen in Anwendungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Parameter von Funktionen zielgerichtet variieren) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 16 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-G1</u>* **Thema**: *Mathematik in 3D – Nutzung von Vektoren* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Objekte im Raum darstellen) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte **Zeitbedarf**: 10 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-G2</u> **Thema:** *Skalarprodukt – eine neue Rechenart und ihr Nutzen* **Zentrale Kompetenzen**: • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Skalarprodukt **Zeitbedarf:** 6 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-G3</u>* **Thema**: *Geraden in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden grafisch darstellen, Gleichungen und Gleichungssysteme lösen) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf**: 8 Std.

<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-G4</u> **Thema:** *Ebenen in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen* **Zentrale Kompetenzen**: • Kommunizieren • Argumentieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** 8 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-G5</u>* **Thema:** *Untersuchung geometrischer Körper – Welche Lösungsstrategien sind hilfreich?* **Zentrale Kompetenzen**: • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Gleichungssysteme lösen, Operationen mit Vektoren und Matrizen durchführen) **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme • Lagebeziehungen und Abstände **Zeitbedarf:** 8 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-S1</u> **Thema:** *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Zufallszahlen generieren, die Kennzahlen statistischer Daten ermitteln) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen **Zeitbedarf:** 8 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-GK-S2</u>* **Thema:** *Treffer oder nicht? – BernoulliExperimente und Binomialverteilungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Histogramme erstellen, Wahrscheinlichkeiten berechnen, Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen variieren) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 8 Std.

Unterrichtsvorhaben Q-GK-S3 **Thema:** *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Histogramme erstellen, Wahrscheinlichkeiten berechnen, die Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen variieren) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 8 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q-GK-S4* **Thema:** *Von Übergängen und Prozessen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Operationen mit Vektoren und Matrizen durchführen, situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge entscheiden und diese gezielt auswählen) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Stochastische Prozesse **Zeitbedarf:** 8 Std.
Unterrichtsvorhaben Q-GK-A6 **Thema**: *Vertiefung und Vernetzung* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge reflektieren und begründen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 10 Std.	

Qualifikationsphase – LEISTUNGSKURS

<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-A1</u> **Thema:** *Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extremstellen und Wendestellen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Funktionen als mathematische Modelle • Grundverständnis des Ableitungs-begriffs • Differentialrechnung **Zeitbedarf:** 20 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-A2</u>* **Thema**: *Funktionsanpassung (Steckbriefaufgaben)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Gleichungssysteme lösen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung • Funktionen als mathematische Modelle **Zeitbedarf:** 6 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-A3</u> **Thema**: *Extremalprobleme* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung • Funktionen als mathematische Modelle **Zeitbedarf:** 10 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-A4</u>* **Thema**: *Integralrechnung* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Flächeninhalte zwischen Funktionsgraph und Abszisse messen, den Wert eines bestimmten Integrals ermitteln) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Grundverständnis des Integralbegriffs • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 24 Std.

Unterrichtsvorhaben Q-LK-A5 **Thema**: *Exponentialfunktionen in Anwendungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren nutzen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 30 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q-LK-G1* **Thema**: *Mathematik in 3D – Nutzung von Vektoren* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden grafisch darstellen, Objekte im Raum darstellen) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte **Zeitbedarf**: 10 Std.
Unterrichtsvorhaben Q-LK-G2 **Thema:** *Skalarprodukt – eine neue Rechenart und ihr Nutzen* **Zentrale Kompetenzen**: • Modellieren • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Skalarprodukt • Lagebeziehungen und Abstände **Zeitbedarf:** 10 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q-LK-G3* **Thema**: *Geraden in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden grafisch darstellen, Gleichungen und Gleichungssysteme lösen) **Inhaltsfeld**: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme • Lagebeziehungen und Abstände **Zeitbedarf**: 10 Std.

Unterrichtsvorhaben Q-LK-G4 **Thema:** *Ebenen in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen* **Zentrale Kompetenzen**: • Problemlösen • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme • Lagebeziehungen und Abstände **Zeitbedarf:** 20 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q-LK-G5* **Thema:** *Untersuchung geometrischer Körper – Welche Lösungsstrategien sind hilfreich?* **Zentrale Kompetenzen**: • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (Gleichungssysteme lösen, Operationen mit Vektoren und Matrizen durchführen) **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte • lineare Gleichungssysteme • Lagebeziehungen und Abstände **Zeitbedarf:** 10 Std.
Unterrichtsvorhaben Q-LK-S1 **Thema:** *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen* **Zentrale Kompetenzen**: • Modellieren • Werkzeuge nutzen (Zufallszahlen generieren, die Kennzahlen statistischer Daten ermitteln, mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen **Zeitbedarf:** 8 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q-LK-S2* **Thema:** *Treffer oder nicht? – BernoulliExperimente und Binomialverteilungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (den Binomialkoeffizienten ermitteln, Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen berechnen) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 12 Std.

<u>*Unterrichtsvorhaben Q-LK-S3*</u> **Thema:** *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen (mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen nutzen, Histogramme erstellen, die Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen variieren) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** 8 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q-LK-S4*</u> **Thema:** *Der Alltag ist nicht immer diskret* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren • Werkzeuge nutzen (Histogramme erstellen, Wahrscheinlichkeiten berechnen, die Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen variieren) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Normalverteilung **Zeitbedarf:** 8 Std.

<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-S5</u> **Thema**: *Signifikant und relevant – Testen von Hypothesen* **Zentrale Kompetenzen:** ▯ Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld**: Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Interpretieren von Hypothesentests **Zeitbedarf**: 10 Std.	*<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-S6</u>* **Thema:** *Von Übergängen und Prozessen* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Operationen mit Vektoren und Matrizen durchführen) **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Stochastische Prozesse **Zeitbedarf:** 8 Std.
<u>Unterrichtsvorhaben Q-LK-A5</u> **Thema**: *Vertiefung und Vernetzung* **Zentrale Kompetenzen:** ▯ Argumentieren • Werkzeuge nutzen (Hilfsmittel und digitale Werkzeuge gezielt auswählen, deren Möglichkeiten und Grenzen reflektieren und begründen) **Inhaltsfeld**: Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 22 Std.	

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Hinweis: Thema, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz des Weiterbildungskollegs Bonn verbindlich vereinbart. In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 2.2 bis 2.4 übergreifende sowie z. T. auch semesterbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

In den folgenden Abschnitten werden alle im Kernlehrplan aufgeführten Kompetenzen aufgegriffen und mit vorhabenbezogenen Absprachen konkretisiert. In der linken Spalte ist jeweils der Schwerpunkt der Kompetenzentwicklung dargestellt. Die Auslassungen weisen darauf hin, dass die Kompetenz im Kernlehrplan weiter gefasst ist, bzw. der Schwerpunkt auf dem dargestellten Aspekt liegt.

Vorhabenbezogene Konkretisierung:

Einführungsphase Stochastik (S)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)</td><td>Thema 1 (14 Std.)</td></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th colspan="2">Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Studierenden
• deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente
• simulieren Zufallsexperimente
• verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen
• beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Studierenden
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Studierenden
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Generieren von Zufallszahlen</td><td colspan="2">Als Einstieg in den Mathematikunterricht greift dieses Unterrichtsvorhaben wesentliche Grundvorstellungen aus dem Alltag und der Sekundarstufe I vertiefend auf.

Ausgehend von einem Würfelspiel wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff wiederholt und systematisiert. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten kann dabei sowohl durch das Spiel als auch durch eine Simulation mit digitalen Hilfsmitteln thematisiert werden. Die Wahrscheinlichkeiten der Würfelergebnisse und anderer Laplace-Experimente führen zu unterschiedlichen Darstellungsformen der Wahrscheinlichkeiten (Bruch, Prozentzahl, Dezimalbruch), mit denen Grundvorstellungen der Sekundarstufe I aufgegriffen werden können.

Im weiteren Verlauf werden verschiedene Alltagssituationen als Zufallsexperiment verstanden und interpretiert und so der Wahrscheinlichkeitsbegriff gefestigt.

Wenn die Zeitplanung es erlaubt, können mit der Frage nach fairen Einsätzen bei verschiedenen Glücksspielen, als Vorgriff auf die Qualifikationsphase, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswerte betrachtet werden.

Ausgehend von einem Urnenmodell im Kontext eines Glücksspiels werden mehrstufige Zufallsexperimente thematisiert und mit Hilfe von Baumdiagrammen dargestellt. Im Anschluss sollten mehrstufige Zufallsexperimente möglichst auch mit Glücksspiel unabhängigen Kontexten mit Baumdiagrammen vertieft werden.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)</td><td>Thema 2 (12 Std.)</td></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th colspan="2">Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Studierenden
• modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier-oder Mehrfeldertafeln
• bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten
• prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit
• bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Studierenden
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Kommunizieren
Die Studierenden
• erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] (Rezipieren)
• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)
</td><td colspan="2">
Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes könnte der Kontext des Doping-Tests dienen. Eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnosetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).
Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten zunächst parallel verwendet.

Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Daher wird bei Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln, die denselben Sachverhalt darstellen, verdeutlicht, an welchen Positionen bedingte Wahrscheinlichkeiten und an welchen Positionen Wahrscheinlichkeiten vom Typ $P(A \cap B)$ stehen.

Die Studierenden sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können.
Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden.
Im Kontext eines Zufallsexperimentes mit stochastisch unabhängigen Teilvorgängen wird anschließend erkundet, wie sich diese Unabhängigkeit im Baumdiagramm bzw. der Vierfeldertafel ausdrückt. Anschließend werden Teilvorgänge anderer Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit überprüft.
</td></tr>
</table>

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

Thema: ***Der Begriff der Funktion – Graphen lesen und interpretieren (E-A1)***	**Thema 3** (12 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben Eigenschaften eines Funktionsgraphen unter Verwendung der Fachbegriffe (Achsenabschnitte, Steigungsverhalten) • interpretieren und bestimmen Parameter von linearen und einfachen quadratischen Funktionen im Anwendungszusammenhang **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigenen Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerhaften Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*	An einfachen Beispielen (z.B. Wachstumsprozesse, Konzentration von Medikamenten, Bewegungen (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung) soll ein Verständnis für einen funktionalen Zusammenhang und den Funktionsbegriff vermittelt werden. Unterschiedliche Darstellungen der Graphen werden selbstständig erstellt und verglichen. Beim Erkunden von Darstellungsmöglichkeiten spielen die digitalen Werkzeuge (Funktionenplotter, GTR) eine wichtige Rolle. Zu Achsenabschnitten wird anschaulich und werkzeuggestützt argumentiert; bei linearen Funktionen werden diese auch hilfsmittelfrei berechnet. Das Steigungsverhalten wird anschaulich qualitativ, bei linearen Funktionen auch quantitativ betrachtet. Algebraische Rechentechniken (zum Umgang mit Termen und zur Lösung von linearen Gleichungen) werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt. Solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich, werden diese ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen. Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote (insbesondere in den Vertiefungskursen) Rechnung getragen. Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software bzw. des GTR gerichtet werden.
Werkzeuge nutzen *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge […] zum Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle […]	

Thema: ***Beschreibung der Eigenschaften quadratischer Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A2)***		**Thema 4** (12 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben die Eigenschaften von quadratischen Funktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf quadratische Funktionen an und deuten die zugehörigen Parameter • interpretieren und bestimmen Parameter von linearen und quadratischen Funktionen im Anwendungszusammenhang • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von innermathematischen Kontexten und Anwendungskontexten **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Strukturieren)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Strukturieren)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Verallgemeinern) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	Die Eigenschaften (Achsenschnittpunkte, Globalverlauf, Symmetrieverhalten, Extrempunkte) quadratischer Funktionen werden anhand von Beispielgrafiken und mit Hilfe von digitalen Werkzeugen untersucht. Die algebraische Berechnung der im Kontext markanten Punktkoordinaten (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte) wird deutlich systematisiert, dabei werden unterschiedliche Vorkenntnisse aufgegriffen, so dass eine algorithmische Sicherheit und ein tragfähiges Grundverständnis erworben werden können. Dabei sollen einzelne Eigenschaften (Achsenschnittpunkte) auch hilfsmittelfrei behandelt werden. Das Vorgehen soll deutlich machen, dass spätere Untersuchungen verschiedener Funktionsklassen einem vergleichbaren Schema unterliegen. Transformationen (Streckung, Verschiebung) werden durch gezieltes Variieren von Parametern im Funktionsterm mithilfe von digitalen Werkzeugen erkundet und systematisiert. Zu den algebraischen Rechentechniken vgl. Bemerkung in E-A1. Weitere Darstellungsformen und deren Modellierung sowie Betrachtungen der Auswirkungen der Parameter bilden den Schwerpunkt neben der systematischen Untersuchung typischer durch Parabeln modellierten Anwendungssituationen (z. B. Brücken-/Tunnelbögen, Flugkurven). Dabei lassen sich auch Funktionsscharen mit Hilfe digitaler Werkzeuge visualisieren. An verschiedenen Schnittuntersuchungen werden quadratische Gleichungen und ihre Lösungsmengen betrachtet und auch ein hilfsmittelfreier Lösungsweg eingeübt. Formal genauere Betrachtungen von Parametern bieten nicht nur eine Möglichkeit der Binnendifferenzierung, sondern auch eine gute Gelegenheit, den Studierenden den Unterschied zwischen Grund- und Leistungskurs zu verdeutlichen, was als Entscheidungshilfe bei den anstehenden Kurswahlen sinnvoll ist.

Werkzeuge nutzen *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … Darstellen von Funktionen graphisch und als Wertetabelle … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Thema: ***Lineare Gleichungssysteme und ihre Einsatzmöglichkeiten (E-G1)***	**Thema 5** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • untersuchen geometrische Sachverhalte mit Hilfe linearer Funktionen • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind • deuten eindeutige Lösungen von linearen Gleichungssystemen im Anwendungskontext **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen Muster und Beziehungen (*Erkunden*) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (*Lösen*) • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung (*Reflektieren*) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge […] zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen […] • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	Über die Schnittuntersuchungen linearer Funktionen und die Funktionsbestimmung von quadratischen Funktionen über drei Punkte (auch in Anwendungsaufgaben) lassen sich Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme (2 x 2 und 3 x 3) gezielt betrachten und bekannte Lösungsverfahren und Schreibweisen zusammenführen bzw. neu einüben. Als systematisches Lösungsverfahren wird der Gauß-Algorithmus in MatrixVektor-Schreibweise als gemeinsames verpflichtendes Lösungsverfahren eingeübt werden. Mit Hilfe digitaler Werkzeuge können auch komplexere Aufgaben gelöst werden. Eine Deutung der angezeigten Lösungen im Anwendungskontext stärkt dabei das Verständnis. An dieser Stelle können Grenzen und Probleme der digitalen Werkzeuge thematisiert werden.

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A3)</td><td>Thema 6 (12 Std.)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td colspan="2">Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
</table>

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und einfachen quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen • beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von innermathematischen Kontexten und Anwendungskontexten **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): *Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Strukturieren)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Strukturieren)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Verallgemeinern) *(Lösen)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)*	Die Eigenschaften (Achsenschnittpunkte, Globalverlauf, Symmetrieverhalten, Extrempunkte) verschiedener Funktionen werden anhand von Beispielgrafiken und mit Hilfe von digitalen Werkzeugen untersucht. Einzelne Eigenschaften (z.B. Achsenschnittpunkte) werden dabei auch rechnerisch behandelt. Zu den algebraischen Rechentechniken vgl. Bemerkung in E-A1. An einfachen Beispielen soll die strukturierte Untersuchung von Funktionen vermittelt werden. Hier bieten sich Potenzfunktionen, aber auch lineares und exponentielles Wachstum als Funktionstypen an, da diese mit wenigen Merkmalen zu beschreiben, deutlich voneinander abzugrenzen und mit einfachen Methoden zu untersuchen sind. Ausgehend von der jeweiligen allgemeinen Form werden die Eigenschaften der Graphen herausgearbeitet sowie absolutes und relatives Wachstum unterschieden. Das Vorgehen soll deutlich machen, dass spätere Untersuchungen verschiedener Funktionsklassen einem vergleichbaren Schema unterliegen. Einfache Anwendungsbeispiele zu Flächen- und Volumenberechnungen motivieren die Betrachtung der einfachen quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen. Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und evtl. mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht. Transformationen (Streckung, Verschiebung) werden durch gezieltes Variieren von Parametern im Funktionsterm erkundet und systematisiert.

Werkzeuge nutzen *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … Darstellen von Funktionen graphisch und als Wertetabelle … Lösen von Gleichungen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Stärkung der Bedienkompetenz der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden.

Thema: ***Ganzrationale Funktionen analysieren – Graphen in Anwendungskontexten interpretieren (E-A4)***		**Thema 7** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben Eigenschaften eines Funktionsgraphen unter Verwendung der Fachbegriffe (Achsenabschnitte, Steigungs- und Krümmungsverlauf, Extrem- und Wendepunkte) • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von innermathematischen Kontexten und Anwendungskontexten • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf ganzrationale Funktionen an und deuten die zugehörigen Parameter • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen aufn *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (direktes Schlussfolgern, Gegenbeispiele, indirekter Beweis) *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen.	Die systematische Untersuchung linearer und quadratischer Funktionen wird zur Betrachtung ganzrationaler Funktionen verallgemeinert. Die Eigenschaften der Graphen ganzrationaler Funktionen werden über die Variation von Parametern herausgearbeitet und Graphen durch Transformationen ineinander überführt. Ausführliche Beschreibungen des Verlaufs von Graphen in Anwendungskontexten werden eingeübt. Mit Hilfe der Analysefunktion digitaler Werkzeuge werden markante Stellen (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) im Anwendungskontext bestimmt sowie Änderungsraten und Krümmungen gedeutet, auch unter Verwendung von Parametern. Zur Bestimmung der Nullstellen sollen auch hilfsmittelfreie Lösungsverfahren (Ausklammern, Substitution) eingeübt werden. Die Vorteile und Grenzen der Modellierung durch ganzrationale Funktionen werden thematisiert (globaler Verlauf, Symmetrien). Ggf. kann eine Modellierung durch Regression (mit Hilfe digitaler Werkzeuge) der schon bekannten Modellierung über Gleichungssysteme gegenübergestellt werden.

Thema: ***Von der durchschnittlichen Änderungsrate zur Ableitungsfunktion (E-A5)***	**Thema 8** (10 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung • leiten Funktionen graphisch ab **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und ihrer fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	Ausgehend von einem Anwendungskontext, bei dem die Änderungsrate eine relevante Größe ist und relativ regelmäßigen Schwankungen unterliegt, werden durchschnittliche Änderungsraten berechnet und als Steigung von Geraden (Sekanten) interpretiert. Hier können verschiedene Fragestellungen im Anwendungskontext (z. B. Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Wachstum) diskutiert und Argumentationen hinterfragt werden. Mit Hilfe digitaler Werkzeuge wird der Übergang von der Sekante zur Tangente graphisch simuliert und es werden die jeweiligen Sekanten- und Tangentensteigungen berechnet und in Anwendungskontexten interpretiert. Dadurch kann die Ableitung über die Steigung der Tangente anschaulich nachvollziehbar definiert werden. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird z.B. die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt. Durch die Erkundung verschiedener Graphen wird die Ableitung an einer Stelle durch das Aufstellen von den Erkenntnissen entsprechenden Regeln zum Graphen der Ableitung verallgemeinert und das graphische Ableiten eingeübt. Zusammenhänge zwischen den Graphen und ihren Ableitungen werden verbalisiert sowie sowohl innermathematisch als auch in Anwendungskontexten graphisch wie rechnerisch begründet. Ableitungsregeln sollen noch nicht eingeführt werden, so dass die Zusammenhänge frei vom Kalkül thematisiert werden können.

… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Qualifikationsphase Grundkurs Analysis (A)

Thema: ***Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extremstellen und Wendestellen (Q-GK-A1)***		**Thema 1** (16 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

<table>
<tr>
<td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Studierenden
• beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion)
• begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
• bilden die Ableitungen von Funktionen: ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten […]
• verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen
• beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung
• lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Problemlösen
Die Studierenden
• analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden)
• erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
• wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen)

Argumentieren
Die Studierenden
• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
</td>
<td>
Zum Einstieg in die Qualifikationsphase wird zunächst ein komplexerer Kontext (z.B. die Herzfrequenzmessung, Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung) mit Hilfe der <u>graphischen</u> Analyse untersucht und beschrieben. Dabei liegt der Schwerpunkt zunächst auf der Begriffsbildung bei der Untersuchung von Graphen und der Stärkung der Bedienkompetenz des digitalen Werkzeugs. So erhalten die Studierenden auch einen Überblick über die im Folgenden zu systematisierenden Inhalte.
Im Sachkontext (Durchschnitts-, Momentangeschwindigkeit) wird der Übergang von der durchschnittlichen Änderung zur lokalen Änderung nicht nur graphisch sondern auch algebraisch erfasst. Dies geschieht exemplarisch an quadratischen Funktionen mit einer der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten (h-Methode oder x gegen x_0) und der Anwendung der binomischen Formeln.
Das Berechnen des Werts der lokalen Änderung an unterschiedlichen beliebigen Stellen z.B. in einer kooperativen Arbeitsform veranschaulicht den Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion.
Dann werden die Ergebnisse des graphischen Differenzierens aufgegriffen. Vermutungen des Zusammenhangs von Funktion und Ableitungsfunktion führen zur Potenzregel. Summen- und Faktorregel können in analoger Form angeschlossen werden.
Kontexte spielen in dieser Phase eine untergeordnete Rolle. Der Schwerpunkt liegt auf dem exakten Sprachgebrauch, der sukzessive vermittelt und eingeübt werden muss.
Das kooperative Erkunden von Funktionen und ihren Graphen führt zu den benötigten Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten.
Die analoge Übertragung der Kriterien auf Krümmungsverhalten und Wendepunkte erfolgt wieder im Anwendungskontext (z.B. Höhenprofile).
Die Zusammenhänge zwischen Ausgangsfunktion, 1. und 2. Ableitung werden immer wieder ausführlich verbalisiert. Gemeinsame Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und am Term ablesbare Eigenschaften werden herausgearbeitet. In diesem Zusammenhang wird auch mit dem Grad einer ganzrationalen Funktion
</td>
</tr>
</table>

verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)* stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen)* nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (direktes Schlussfolgern, Gegenbeispiele, indirekter Beweis) (*Begründen)*	argumentiert. In weiteren Anwendungskontexten werden die Kriterien vertieft. Aufgrund der besonderen Bedeutung der Nullstellen werden an geeigneten Aufgaben die benötigten auch hilfsmittelfreien Techniken der Bestimmung wiederholt.

Thema: ***Modellierungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen (Steckbriefaufgaben) (Q-GK-A2)***	**Thema 2** (4 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • bestimmen Parameter einer Funktion mit Hilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden den GTR zum Lösen von Gleichungssystemen und zum Darstellen der Funktionsgraphen	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase werden Designobjekte, Flugbahnen oder architektonische Formen zum Anlass genommen, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Damit nicht algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zu nutzen. Es besteht die Möglichkeit, den Gauß-Algorithmus (im Sinne des Spiralcurriculum) zu wiederholen.

Thema: ***Extremalprobleme (Q-GK-A3)***	**Thema 3** (8 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)*	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Im ersten Teil wird das Ermitteln einer Zielfunktion aus Haupt- und Nebenbedingung(en) eingeübt. Dazu bietet sich als Einstieg ein Anwendungsbeispiel (z.B. Pralinenschachtelaufgabe) in kooperativer Arbeitsform an. Schwerpunktmäßig werden anschließend Aufgaben mit maximalen Flächeninhalten oder maximalen/minimalen Abständen sowohl innermathematisch als auch in Sachkontexten behandelt. An mindestens einem Problem entdecken die Studierenden die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z.B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Im zweiten Teil werden Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Besucherströme in einen Freizeitpark und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der Stellen mit extremaler Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).
• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*	

- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* - überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)*	

Thema: *Integralrechnung (Q-GK-A4)*		**Thema 4** (16 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*	Das Thema ist vergleichbar zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg erfolgt über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit, in der sich die Studierenden selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der einfachen, geometrischen Eingrenzung durch Ober- und Untersummen entwickeln die Studierenden eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands und vergleichen diese. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Studierenden so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Studierende entdecken z.B. mithilfe digitaler Werkzeuge (Powerpoint), dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Studierenden durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet (z.B. durch ein Graphendomino). Neben der Nutzung des Hauptsatzes soll das Abschätzen, bzw. das numerische Berechnen von Flächenmaßzahlen unter einem Graphen als Verfahren auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Studierenden berechnen Flächeninhalte, indem sie die Intervalladditivität und Linearität nutzen. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt.

Kommunizieren *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen verschiedene digitale Werkzeuge (GTR, Funktionenplotter, Dynamische Geometrie-Software) zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Komplexere Anwendungsaufgaben werden am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

Thema: ***Exponentialfunktionen in Anwendungen (Q-GK-A5)***	**Thema 5** (16 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang • bilden die Ableitungen von Funktionen: - natürliche Exponentialfunktion • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte): *Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens steht eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall). Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Anschließend wird mit Hilfe eines digitalen Werkzeugs mit einem Schieberegler die Basis variiert. Dabei ergibt sich die Frage, für welche Basis die Funktion und ihre Ableitungsfunktion übereinstimmen. Resultierend wird die e-Funktion mit ihrer besonderen Eigenschaft thematisiert. Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion kann eine Kettenlinie modelliert werden. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. Produkt- und Kettenregel werden in der Formelsammlung aufgefunden und ohne Beweis verwendet. Allgemeine Funktionseigenschaften wie Globalverlauf und Symmetrie sowie die Berechnung markanter Punkte werden wiederholt und an der neuen Klasse von Funktionen betrachtet Bei Anwendungskontexten ist das Thema der Modellkritik, z.B. bezogen auf den Geltungsbereich eines Modells wichtig. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung un-
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus nutzen […] • digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	tersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

Thema: ***Vertiefung und Vernetzung (Q-GK-A6)***		**Thema 6** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • bestimmen Parameter einer Funktion mit Hilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (*Begründen*) • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (direktes Schlussfolgern, Gegenbeispiele, indirekter Beweis) (*Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und-/ Oder-Verknüpfungen, Negation, All-und Existenzaussagen) (*Begründen*) • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* • erkennen lückenhafte Argumentationsketten und vervollständigen sie *(Beurteilen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie (*Beurteilen*) • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • Verwenden digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle … grafischen Messen von Steigungen	Innermathematische und kontextbezogene Steckbriefaufgaben ermöglichen eine integrierte Wiederholung und Vertiefung des Themas „ganzrationale Funktionen“ und „LGS“. Ganzrationale und exponentielle Wachstumsmodelle im Vergleich vervollständigen die Vernetzung des bisher Gelernten. Lernplakate (z.B. auch Mind-maps), die Begriffe aus den bisherigen Unterrichtsvorhaben in Beziehung zueinander setzen, werden zur Abiturvorbereitung erstellt und mit den Abiturvorgaben und Lernhilfen abgeglichen, so dass ein individueller Lernplan zur Abiturvorbereitung entsteht. Anhand komplexer Aufgaben werden Begriffe in Beziehung zueinander gesetzt und verschiedene, teilweise auch fehlerhafte Argumentationsketten analysiert. Konkurrierende Argumentationsstrategien werden auf ihre Effektivität hin untersucht.
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Thema: ***Mathematik in 3D – Nutzung von Vektoren (Q-GK-G1)***	**Thema 7** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum • erfassen geometrische Objekte in räumlichen kartesischen Koordinatensystemen und stellen einfache dreidimensionale Objekte mit Hilfe digitaler Werkzeuge dar • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter *(Diskutieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	Ausgehend von den Vorkenntnissen der Studierenden werden verschiedene Koordinatisierungen thematisiert (z.B. GPS, geographische Koordinaten, kartesische Koordinaten, Robotersteuerung, Spidercam). Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen in Kontexten (z.B. Kräfteparallelogramm, Spidercam, Verschiebungen) werden einfache geometrische Problemstellungen beschrieben. Vektoraddition und skalare Multiplikation werden an Beispielen eingeführt und mit den Rechengesetzen für Zahlen verglichen. Die Studierenden lesen die Koordinaten der Eckpunkte von im Koordinatensystem dargestellten Schrägbildern ab und stellen im Schrägbild geeignete, nicht zu komplexe geometrische Modelle (geradlinige Kanten) unter Verwendung eines geeigneten digitalen Werkzeugs dar, um ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln. Dabei werden die Darstellungen in Bezug auf Wirkungen, insbesondere auf Winkelverzerrungen, untersucht und beurteilt Im Rahmen der Untersuchung einfacher geometrischer Objekte beschreiben die Studierenden Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), bestimmen die Koordinaten von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten) und untersuchen auf Parallelität (Kollinearität). Für die Abstandsberechnung zweier Punkte wird der Betrag des Differenzvektors, der am Satz des Pythagoras verdeutlicht wird, verwendet.

Werkzeuge nutzen *Die Studierenden* • nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-GeometrieSoftware • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Darstellen von Objekten im Raum	

Thema: ***Skalarprodukt – eine neue Rechenart und ihr Nutzen (Q-GK-G2)***	**Thema 8** (6 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe von Vektoreigenschaften, bzw. dem Skalarprodukt geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Mathematisieren) ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • recherchieren Informationen *(Erkunden)* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt vervollständigt das Rechnen mit Vektoren, indem die Multiplikation von Vektoren definiert wird. In diesem Zusammenhang kann (optional über den KLP hinausgehend) auch das Vektorprodukt angesprochen werden. Das Ergebnis eines Skalarproduktes wird geometrisch interpretiert. Die Studierenden erkennen, formulieren und berechnen Anwendungen des Skalarprodukts: Länge eines Vektors (Rückbezug zu UV Q-GK-G1), Orthogonalität von Vektoren, Winkel zwischen zwei Vektoren. Bei der Untersuchung von Objekten und Situationen im Raum kann problemlösend gearbeitet und die Anwendung des Skalarprodukts vertieft werden. *Hinweis: auf eine Herleitung mit dem Kosinussatz wird verzichtet.*

Thema: ***Geraden in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden (Q-GK-G3)***	**Thema 9** (8 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen Geodreiecke, […] geometrische Modelle und Dynamische-GeometrieSoftware • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt und Richtungsvektor beschrieben und unter Verwendung eines geeigneten digitalen Werkzeugs graphisch dargestellt. Dabei werden Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen, Zeitabhängigkeit, Geschwindigkeitsvektor) einbezogen. Abstrahierend vom Einstiegskontext wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben, sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen werden auch hilfsmittelfrei durchgeführt. Ein weiterer Kontext (z. B. ein Klettergerüst auf dem Spielplatz) illustriert die Darstellung von Strecken in Parameterform als begrenzte Punktmenge. Auch in diesem Kontext werden Punktproben durchgeführt. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt. Als Unterrichtsmethoden werden Lernplakate o.Ä. genutzt. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens werden nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext wird die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) wieder aufgegriffen und die Frage der Kollision untersucht. Für die Schnittpunktberechnung wird ein digitales Werkzeug genutzt. In diesem Sachzusammenhang wird die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten (Wo befinden sich die Flugzeuge zum gleichen Zeitpunkt?) relevant.

	Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum mit dem digitalen Werk-

	zeug numerisch oder graphisch ermittelt werden. Begrifflich davon abgegrenzt, aber nicht berechnet, wird der Abstand zwischen den Flugbahnen (Wie groß ist der Abstand zwischen (windschiefen) Geraden?). Der systematische Vergleich verschiedener Beispiele zur Lage zweier Geraden und die Bestimmung der entsprechenden Lösungsmengen mit dem GTR (auch unter der Verwendung der Koeffizientenmatrix) führen zur Entdeckung von gemeinsamen Strukturen. Zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung wird herausgestellt.

Thema: ***Ebenen in 3D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen (Q-GK-G4)***		**Thema 10** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Gerade und Ebene • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen auch in Matrix-Vektor-Schreibweise **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)*	Aus verschiedenen Kontexten, z.B. dreibeiniger Tisch (3 Punkte), dreieckiges Sonnensegel (Gerade und 1 Punkt oder 3 Punkte), Tagebaubagger (2 sich schneidende Geraden) usw. werden Kennzeichen von Ebenen herausgearbeitet und die Parametrisierung im Koordinatensystem vorbereitet. Verschiedene Möglichkeiten der Herleitung der Parameterform der Ebene ergeben sich. *Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.* Im Kontext des Schattenwurfs entwickeln die Studierenden einen Lösungsplan zur Untersuchung der Lagebeziehungen von Gerade und Ebene analog zur Lagebeziehung von Geraden. Bei der Betrachtung der Lagebeziehungen werden insbesondere die Kompetenzerwartungen aus dem Bereich des Argumentierens berücksichtigt. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt. Die Interpretation unterschiedlicher Lösungsmengen von Linearen Gleichungssystemen führt auf eine Systematisierung der Lagebeziehungen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung wird deutlich.
• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*	

Thema: ***Untersuchungen an geometrischen Körpern - Welche Lösungsstrategien sind hilfreich? (Q-GK-G5)***		**Thema 11** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum • erfassen geometrische Objekte in räumlichen kartesischen Koordinatensystem und stellen einfache dreidimensionale Objekte mit Hilfe digitaler Werkzeuge dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden und zwischen Gerade und Ebene • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen auch in Matrix-Vektor-Schreibweise • untersuchen mit Hilfe von Vektoreigenschaften bzw. dem Skalarprodukt geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel,	Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Studierenden prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten als Körper vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden. Auch hier wird eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-GK-G4 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von zwei relevanten Punkten ermöglichen es, z. B. die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Das Gauß-Verfahren wird im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung wird stets deutlich. Dazu gehört auch die Interpretation der Lösungen von linearen Gleichungssystemen im Sachkontext. Parallelprojektion (Sonnenstrahlen) und Zentralprojektion (punktuelle Lichtquelle) bieten durch Betrachtung des Schattenwurfes eine Vertiefung und Vernetzung der bisherigen Unterrichtsinhalte. Der Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge ermöglicht es, den Ort der Strahlenquelle zu variieren. In diesem Unterrichtsvorhaben wird besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben. In diesem Unterrichtsvorhaben werden

Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	auch heuristische Strategien und Vorgehensweisen aufgegriffen. Beispielsweise: • eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, • geometrische Hilfsobjekte einzuführen, • an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, • bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, • unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen.

Qualifikationsphase Grundkurs Stochastik (S)

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)*	**Thema 12** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden:* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum .... Generieren von Zufallszahlen … Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten (Mittelwert, Standardabweichung) • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und	Im einführenden Teil dieses Unterrichtsvorhabens werden statistische Daten daraufhin untersucht, ob z.B. eine Annahme von gleichen Wahrscheinlichkeiten (Würfel) realistisch erscheint. Dabei wird der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der E-Phase wiederholt. Anhand von konkreten Beispielen werden die Begriffe des Erwartungswertes und der Varianz bzw. Standardabweichung eingeführt und deren Bedeutungen diskutiert. Je nach Größe der jeweiligen Stichprobe können die konkreten Berechnungen mit Hilfe des GTR erfolgen. Im zweiten Teil dieses Unterrichtsvorhabens liegt der Fokus auf Modellierung stochastischer Situationen. Dabei kann der Übergang von statistischen Werten (Häufigkeiten) zu Wahrscheinlichkeiten als Teil einer Modellierung interpretiert und diskutiert werden, wobei auch die Angemessenheit der Modellierung thematisiert werden sollte. Hier sollte als Vernetzung mit der Analysis die Wahrscheinlichkeitsverteilung als eindeutige Zuordnung thematisiert werden. Diese Funktionen werden in der Regel als Tabellen dargestellt und haben meistens keinen Funktionsterm. Die Frage nach fairen Einsätzen bei verschiedenen Glücksspielen motiviert die Einführung der Zufallsgröße und Untersuchung deren Erwartungswertes. Dabei kann auch die Abhängigkeit von den Annahmen der Modellierung diskutiert werden. Die Analogie zwischen dem Erwartungswert und dem Arithmetischem Mittel führt dazu, Varianz und Standardabweichung für Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zufallsgrößen zu betrachten. Anschließend können mit Hilfe des Erwartungswertes, der Varianz und der Standardabweichung Wahrscheinlichkeitsverteilungen verglichen und prognostische Aussagen getätigt werden.
Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus	

Thema: ***Treffer oder nicht? – Modellierungen mit Bernoulli-Experimenten und Binomialverteilungen (Q-GK-S2)***		**Thema 13** (12 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • nutzen Binomialverteilungen […] zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • greifen auf Erfahrungen aus ihrer Berufswelt zurück, die sie reorganisieren und mit neuen Inhalten verknüpfen *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experiment. Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Für den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben eignet sich der Kontext von Prüfungsaufgaben, bei denen jeweils genau eine der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten richtig ist. In diesem Kontext führt die Frage nach dem Bestehen der Prüfung unter der Grundannahme, dass blind geraten wird, zu einer Bernoullikette, die für eine geringe Anzahl an Prüfungsfragen auf das Baumdiagramm als bekannte Vorgehensweise zurückgeführt werden kann. Die besondere Bedeutung der Unabhängigkeit für Bernoulliketten wird am Baumdiagramm entdeckt und für verschiedene Kontexte (z.B. Ziehen mit/ohne Zurücklegen) interpretiert. Die Binomialverteilung wird in einer problemhaltigen Situation aus dem Baumdiagramm einer Bernoullikette entdeckt bzw. entwickelt. Dabei kann der Binomialkoeffizient als Faktor für die Anzahl der gesuchten Wege zunächst erkundet und schließlich ohne Herleitung eingeführt und verwendet werden. Mit Hilfe der Binomialverteilung werden schließlich Problemstellungen in verschiedenen realen Kontexten und Spielsituationen bearbeitet und auch mit Hilfe des GTR gelöst. In diesem Rahmen können am Rande auch Fragen der Modellierung wiederholend aufgegriffen werden. Bei entsprechenden Problemstellungen werden auch kumulierte Wahrscheinlichkeiten eingeführt, verwendet und mit dem GTR berechnet. Verschiedene Lösungswege (zum Beispiel über die Gegenwahrscheinlichkeit) können verglichen und diskutiert werden. Die entscheidenden Voraussetzungen von Bernoulli-Experimenten werden dabei an konkreten Beispielen kritisch überprüft (Beispiel: weiblicher Anteil von Besuchern einer Veranstaltung in Teilen der Warteschlange). *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*

Kommunizieren *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter *(Diskutieren)*	

Thema: ***Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-GK-S3)***	**Thema 14** (6 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben den Einfluss der Parameter *n* und *p* auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen […] • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (μ, σ)	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt durch die grafische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Mit Hilfe von Histogrammen mit großem Stichprobenumfang kann ein Bezug zur eventuell aus dem Alltagswissen bekannten Glockenkurve hergestellt werden. Die Glockenkurve muss mathematisch nicht näher im Unterrichtet betrachtet werden. Nachdem der Einfluss der Parameter n und p visualisiert untersucht wurde, können begründete Vermutungen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung aufgestellt werden. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, wird die Formel für die Standardabweichung ohne eine allgemeingültige Herleitung verwendet. An Beispielen wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. *Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.* *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.*

… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und (auf erhöhtem Anforderungsniveau) normalverteilten Zufallsgrößen	

Thema: ***Von Übergängen und Prozessen (Q-GK-S4)***	**Thema 15** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*) ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • präzisieren Vernutungen mit Hilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente (Begründen) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	*Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Studierende modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Die tabellarische Darstellung der Übergänge in einem Prozessdiagramm führt in der verkürzten Schreibweise zu eine stochastischen Übergangsmatrix. Das ermöglicht z.B. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen anhand der Matrixelemente. Im Rahmen der Berechnung des folgenden Zustandes wird ein System von Gleichungen entwickelt, das zur Matrix-Vektor-Darstellung führt und damit an die Matrix-Vektor-Schreibweise der linearen Gleichungssysteme anknüpft; insbesondere lassen sich damit auch vorangegangene Zustände ermitteln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Wenn der zeitliche Rahmen es erlaubt, können bei der Bestimmung der stabilen Verteilung die näherungsweise Bestimmung mit Hilfe des GTR und die algebraische Bestimmung mit Hilfe von Gleichungssystemen als konkurrierende Lösungswege verglichen und diskutiert werden. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

• nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus	

Qualifikationsphase Leistungskurs Analysis (A)

Thema: ***Von der graphischen Analyse zu Kriterien für Extremstellen und Wendestellen (Q-LK-A1)***		**Thema 1** (20 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten • bilden die Ableitungen von Funktionen: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, ganzrationale Funktionen, […] • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*	Zum Einstieg in die Qualifikationsphase wird zunächst ein komplexerer Anwendungskontext (z.B. Herzfrequenzmessung, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung) mit Hilfe der graphischen Analyse untersucht und beschrieben. Dabei liegt der Schwerpunkt zunächst auf der Begriffsbildung bei der Untersuchung von Graphen und der Stärkung der Bedienkompetenz des digitalen Werkzeugs. soi erhalten die Studierenden auch einen Überblick über die im Folgenden zu systematisierenden Inhalte. Im Sachkontext (Durchschnitts-, Momentangeschwindigkeit) wird der Übergang von der durchschnittlichen Änderung zur lokalen Änderung nicht nur graphisch sondern auch algebraisch erfasst. Verschiedene Darstellungs- und Berechnungsmöglichkeiten des Differentialquotienten werden anhand einer quadratischen Funktion verglichen. Das Berechnen des Werts der lokalen Änderung an unterschiedlichen beliebigen Stellen z. B. in einer kooperativen Arbeitsform veranschaulicht den Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion. Die Ableitungsregel für Potenzfunktionen wird aus geeigneten Beispielen mit Hilfe der graphischen Ableitung vermutet und anschließend rechnerisch bestätigt. Summen- und Faktorregel können in analoger Form angeschlossen werden. Das kooperative Erkunden von Funktionen und ihren Graphen (z.B. als Gruppenpuzzle) führt zu den benötigten Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten. Anwendungskontexte sollen in dieser Phase zunächst nicht betrachtet werden. Der Schwerpunkt liegt auf dem exakten Sprachgebrauch beim Argumentieren, der sukzessive vermittelt und eingeübt werden muss. Die analoge Übertragung der Kriterien auf Krümmungsverhalten und Wendepunkte erfolgt wieder im Anwendungskontext (z.B. Höhenprofile). In weiteren Anwendungskontexten werden die Kriterien vertieft und die Zusammenhänge zwischen Ausgangsfunktion, 1. und 2. Ableitung immer wieder ausführlich verbalisiert. Gemeinsame Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und am Term ablesbare Eigenschaften sollen deutlich herausgearbeitet werden.

- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* - verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* - erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* - überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* - beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)* - stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen)* - nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (direktes Schlussfolgern, Gegenbeispiele, indirekter Beweis) (*Begründen)*	Aufgrund der besonderen Bedeutung der Nullstellen werden an geeigneten Aufgaben die benötigten auch hilfsmittelfreien Techniken der Bestimmung eingeübt.

Thema: *Modellierungsaufgaben mit ganzrationalen Funktionen (Streckbriefaufgaben (Q-LK-A2)*	**Thema 2** (6 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • bestimmen Parameter einer Funktion mit Hilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden den GTR zum Lösen von Gleichungssystemen und zum Darstellen der Funktionsgraphen	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase werden Designobjekte, Flugbahnen oder architektonische Formen zum Anlass genommen, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Damit nicht algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zu nutzen. Es besteht die Möglichkeit, den Gauß-Algorithmus (im Sinne des Spiralcurriculum) zu wiederholen.

Thema: *Extremalprobleme (Q-LK-A3)*	**Thema 3** (10 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es ist erforderlich, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen. Im ersten Teil wird das Ermitteln einer Zielfunktion aus Haupt- und Nebenbedingung(en) eingeübt. Dazu bieten sich als Einstieg handlungsorientierte Problemstellungen (z.B. Optimierung von Faltschachteln) in kooperativer Arbeitsform an. Schwerpunktmäßig werden anschließend Aufgaben mit maximalen Flächeninhalten oder maximalen/minimalen Abständen sowohl innermathematisch als auch in Sachkontexten behandelt. An mindestens einem Problem entdecken die Studierenden die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z.B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“) und überprüfen / diskutieren die Modellierung. Im zweiten Teil werden Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Besucherströme in einen Freizeitpark und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der Stellen mit extremaler Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).

Thema: ***Integralrechnung (Q-LK-A4)***	**Thema 4** (24 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • begründen geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Beziehung zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ • bestimmen Integrale numerisch und mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion • bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszissenachse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)*	Das Thema ist vergleichbar zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg erfolgt über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit, in der sich die Studierenden selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der einfachen, geometrischen Eingrenzung durch Ober- und Untersummen entwickeln die Studierenden eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen diese. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Studierenden den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Studierende entdecken z.B. mithilfe digitaler Werkzeuge (Powerpoint), dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Studierenden durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet (z.B. durch ein Graphendomino), ansonsten wird der Umgang mit der Formelsammlung und dem GTR geübt. Neben der Nutzung des Hauptsatzes wird das Abschätzen, bzw. das numerische Berechnen von Flächenmaßzahlen unter einem Graphen als Verfahren auch hilfsmittelfrei durchgeführt.

• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus authentischen Texten, mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen verschiedene digitale Werkzeuge (GTR, Tabellenkalkulationen, Funktionenplotter, Dynamische Geometrie-Software] zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Die Studierenden berechnen Flächeninhalte, indem sie die Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) nutzen. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Anwendungsaufgaben werden am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben herzustellen. Dazu gehören auch Berechnungen von Rotationskörpern und uneigentliche Integrale. *Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehenden Zeit (über den Kehrlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an.*

Thema: ***Exponentialfunktionen in Anwendungen (Q-LK-A5)***	**Thema 5** (30 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • bilden die Ableitungen von Funktionen: - natürliche Exponentialfunktion - Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis - natürliche Logarithmusfunktion • erkennen Strukturen zusammengesetzter Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) und begründen damit deren wesentl. Eigenschaften • wenden die Summen- und Faktorregel, sowie die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens steht eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte z. B. in Gruppenarbeit mit Präsentation stehen (Wachstum und Zerfall). Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Anschließend wird mit Hilfe eines digitalen Werkzeug mit einem Schieberegler die Basis variiert. Dabei ergibt sich die Frage, für welche Basis die Funktion und ihre Ableitungsfunktion übereinstimmen. Resultierend wird die e – Funktion mit ihrer besonderen Eigenschaft thematisiert. Die erforderlichen Ableitungsregeln, insbesondere die Ketten- und Produktregel, können zunächst ausgehend von vorgegebenen Beispielen oder mit Hilfe digitaler Werkzeuge erkundet und entdeckt werden. Exemplarische Beweise und Argumentationsketten werden untersucht, indem zum Beispiel vertauschte oder unvollständige Argumentationsketten berichtigt werden. Die Eigenschaften (wie Globalverlauf, Symmetrie, usw.) und Strukturen zusammengesetzter Funktionen werden mit dem GTR erkundet und zum Beispiel in einem Glossar zusammengestellt. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen) wird eine Modellierung durch zusammengesetzte Funktionen erarbeitet. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. Als Beispiel für eine Funktionenschar wird folgende Funktionenschar $f_{a,b}(x) = ae^{-(x-b)^2}$ mit dem GTR untersucht. Sie kann später in der Stochastik als Grundlage einer Normalverteilung wiedererkannt werden. In diesem Rahmen wird auch die natürliche Logarithmusfunktion eingeführt und wesentliche Eigenschaften untersucht. Logarithmusfunktionen werden auch in Kombination mit anderen Funktionstypen bearbeitet.

• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* • erkennen lückenhafte Argumentationsketten und vervollständigen sie *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus • nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: ***Vertiefung und Vernetzung (Q-LK-A6)***	**Thema 6** (22 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • Bestimmen Parameter einer Funktion mit Hilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (*Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (direktes Schlussfolgern, Gegenbeispiele, indirekter Beweis) (*Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und-/ Oder-Verknüpfungen, Negation, All-und Existenzaussagen) (Begründen) • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* • erkennen lückenhafte Argumentationsketten und vervollständigen sie *(Beurteilen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie (Beurteilen) • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle	Innermathematische und kontextbezogene Steckbriefaufgaben ermöglichen eine integrierte Wiederholung und Vertiefung des Themas „ganzrationale Funktionen" und „LGS". Ganzrationale und exponentielle Wachstumsmodelle im Vergleich vervollständigen die Vernetzung des bisher Gelernten. Eine Vernetzung der Inhaltsfelder (Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie) bieten beispielsweise die Themen „Geraden in der Analysis und analytischen Geometrie", „Gaußsche Glockenkurve in der Analysis und Stochastik". Lernlandkarten / Lernplakate, die Begriffe aus den bisherigen Unterrichtsvorhaben in Beziehung zueinander setzen, werden zur Abiturvorbereitung erstellt und mit den Abiturvorgaben und Lernhilfen abgeglichen, so dass ein individueller Lernplan zur Abiturvorbereitung entsteht. Anhand komplexer Aufgaben werden Begriffe in Beziehung zueinander gesetzt und verschiedene, teilweise auch fehlerhafte Argumentationsketten analysiert. Konkurrierende Argumentationsstrategien werden auf ihre Effektivität hin untersucht.
… grafischen Messen von Steigungen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus	

- reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Thema: ***Mathematik in 3D – Nutzung von Vektoren (Q-LK-G1)***	**Thema 7** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum • erfassen geometrische Objekte in räumlichen kartesischen Koordinatensystemen und stellen einfache dreidimensionale Objekte mit Hilfe digitaler Werkzeuge dar • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • bestimmen Abstände zwischen Punkten • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter *(Diskutieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	Ausgehend von den Vorkenntnissen der Studierenden werden verschiedene Koordinatisierungen thematisiert. (z.B. GPS, geographische Koordinaten, kartesische Koordinaten, Robotersteuerung, Spidercam) Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen in Kontexten (z.B. Gierfähre, Kräfteparallelogramm, Spidercam, Verschiebung Normalparabel) werden einfache geometrische Problemstellungen beschrieben. Die Herleitung der Rechenregeln für Vektoren wird in Bezug zu bisher bekannten Rechengesetzen gesetzt, um den Aufbau und elementare Vorgehensweisen der Mathematik zu verdeutlichen. Geeignete, nicht zu komplexe geometrischen Modelle (z. B. „unvollständige“ Holzquader) werden von den Studierenden, unter Verwendung eines geeigneten digitalen Werkzeugs, im Schrägbild dargestellt, um ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln. Dabei werden die Darstellungen in Bezug auf Wirkungen, insbesondere auf Winkelverzerrungen, untersucht und beurteilt. Hier bietet sich eine Verknüpfung zu verschiedenen Kartendarstellungen (Erdkunde, Geschichte) an. Im Rahmen der Untersuchung einfacher geometrischer Objekte beschreiben die Studierenden Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), bestimmen die Koordinaten von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), untersuchen auf Parallelität (Kollinearität). Für die Abstandsberechnung zweier Punkte wird der Betrag des Differenzvektors, der am Satz des Pythagoras verdeutlicht wird, verwendet.

Werkzeuge nutzen *Die Studierenden* • nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-GeometrieSoftware • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	

Thema: *Skalarprodukt – eine neue Rechenart und ihr Nutzen (Q-LK-G2)*	**Thema 8** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe von Vektoreigenschaften, bzw. dem Skalarprodukt geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (*Mathematisieren*) ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt vervollständigt das Rechnen mit Vektoren, indem die Multiplikation von Vektoren definiert wird. In diesem Zusammenhang kann *(optional über den KLP hinausgehend)* auch das Vektorprodukt angesprochen werden. Das Ergebnis eines Skalarproduktes wird geometrisch interpretiert. Die Studierenden erkennen, formulieren und berechnen Anwendungen des Skalarprodukts: Länge eines Vektors (Rückbezug zu UV Q-LK-G1), Orthogonalität von Vektoren, Winkel zwischen zwei Vektoren. Bei der Untersuchung von Objekten und Situationen im Raum kann problemlösend gearbeitet und die Anwendung des Skalarprodukts vertieft werden. (Hinweis: auf eine Herleitung mit dem Kosinussatz kann verzichtet werden.) Anknüpfend an das vorige UV Q - LK - G 1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken inklusive Winkelberechnungen mithilfe des Skalarproduktes untersucht Dreidimensionale Objekte im Raum bieten vielfältige Anlässe für im Sinne des Problemlösens offen angelegte, exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte, z.B. Gebäude bezogen werden. Elementargeometrische Lösungswege werden in diesem Zusammenhang als Alternativen unter Verwendung der Formelsammlung aufgezeigt und auf ihre Relevanz hin überprüft, z.B. Strahlensätze.

Thema: ***Geraden in 3D - Lagebeziehungen zwischen Geraden (Q-LK-G3)***	**Thema 9** (10 Std.)

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen […] Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-GeometrieSoftware • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt und Richtungsvektor beschrieben und unter Verwendung eines geeigneten digitalen Werkzeugs graphisch dargestellt. Dabei werden Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen, Zeitabhängigkeit, Geschwindigkeitsvektor) einbezogen. Abstrahierend vom Einstiegskontext wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben, sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen werden auch hilfsmittelfrei durchgeführt. Ein weiterer Kontext (z.B. ein Klettergerüst auf dem Spielplatz) illustriert die Darstellung von Strecken in Parameterform als begrenzte Punktmenge. Auch in diesem Kontext werden Punktproben durchgeführt. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung, sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden selbstständig solche Darstellungen entwickelt und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt. Als Unterrichtsmethoden werden Lernplakate, o.Ä. genutzt. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens werden nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext dazu wird die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) wiederaufgegriffen. Für die Schnittpunktberechnung wird ein digitales Werkzeug genutzt.

… grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden	*Hinweis: Ergänzend kann hier oder als Vernetzung von Analytischer Geometrie und Analysis im Vorhaben Q-LK-G5 der zeitabhängige Abstand zwischen den Punkten, an denen die Flugzeuge sich zur gleichen Zeit befinden, betrachtet wer-*

… Darstellen von Objekten im Raum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	*den. Hierzu kann der zeitabhängige Abstand mit dem digitalen Werkzeug grafisch als Parabel dargestellt werden. Das Abstandsminimum (vgl. Scheitelpunkt der Parabel) wird mit Verfahren der Analysis ermittelt. Die verschiedenen Lösungswege werden verglichen.* Der systematische Vergleich verschiedener Beispiele zur Lage zweier Geraden und die Bestimmung der entsprechenden Lösungsmengen mit dem GTR (auch unter der Verwendung der Koeffizientenmatrix) führen zur Entdeckung von gemeinsamen Strukturen. Zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung wird herausgestellt.

Thema: *Ebenen in 3 D – Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen (Q-LK-G4)*	**Thema 10** (20 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen [...] zwischen Gerade und Ebene • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen auch in Vektor-Matrix-Schreibweise • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • recherchieren Informationen *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren)aus, die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [..]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz	Freie oder leistungsdifferenziert gesteuerte Recherchearbeit zu Ebenen im dreidimensionalen Raum führen zu unterschiedlichen Darstellungen (Parameter-, Koordinaten-, Normalen- und Hesseform), die z.B. im Gruppenpuzzle miteinander verglichen werden. Studierende stellen geeignete Vergleichskriterien auf, z.B. Anzahl und Art der erforderlichen Vektoren, Anknüpfungsmöglichkeiten an Geradendarstellung, Nutzen für zeichnerische Darstellung. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen kann eine räumliche Geometriesoftware verwendet werrden. Die Achsenabschnittsform erleichtert das Zeichnen geeigneter Ebenen ohne Hilfsmittel. Im Kontext des Schattenwurfs entwickeln die Studierenden einen Lösungsplan zur Untersuchung der Lagebeziehungen von Gerade und Ebene analog zur Lagebeziehung von Geraden. Die Interpretation unterschiedlicher Lösungsmengen von Linearen Gleichungssystemen führt auf eine Systematisierung der Lagebeziehungen. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt. Die Interpretation unterschiedlicher Lösungsmengen von Linearen Gleichungssystemen führt auf eine Systematisierung der Lagebeziehungen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung wird deutlich. *Vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit die Lösungsmenge eines Systems von Koordinatengleichungen als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden. Dabei wird die Matrix-Vektor-Schreibweise genutzt. Dies bietet weitere Möglichkeiten, bekannte mathematische Sachverhalte zu vernetzen.* Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems *(oder über den Kernlehrplan hinausgehend) mit dem*

(Reflektieren) • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lsg *(Reflektieren)* ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen math. Darstellungsformen *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* • greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter *(Diskutieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	*Vektorprodukt* bestimmt. Verschiedene Aufgaben zur Abstandsberechnung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen werden arbeitsteilig, leistungsdifferenziert bearbeitet, Lösungsstrategien werden erarbeitet und anschließend im Plenum vorgestellt. Hier kann der Kontext der Flugbahnen aus Q-LK-G3 in Bezug auf den Abstand windschiefer Geraden wieder aufgegriffen werden. In diesem Sachzusammenhang wird die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten (Wo befinden sich die Flugzeuge zum gleichen Zeitpunkt?) relevant. Dabei muss deutlich werden, dass es um zwei verschiedene Abstandsbegriffe, nämlich den zeitlich gebundenen Abstand zwischen zwei Punkten und den Abstand zwischen geometrischen Objekten geht. (Bedeutung der Parameter)

Thema: ***Untersuchungen an geometrischen Körpern - Welche Lösungsstrategien sind hilfreich? (Q-LK-G5)***	**Thema 11** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Studierenden prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten als Körper mit begrenzten Flächen vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden. Lagebeziehungen und Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen werden von den Studierenden systematisiert, indem sie selber Fragestellungen und zugehörige Lösungsstrategien entwickeln und ihre Arbeitsergebnisse in geeigneter Form präsentieren. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden (Q-LK-G3) und zu Ebenen (Q-LK-G4) ermöglichen es, z. B. die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. In diesem Kontext wird die Einschränkung des Definitionsbereichs, z.B. zur Beschreibung von Parallelogrammen und Dreiecken untersucht. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden. Parallelprojektion (Sonnenstrahlen) und Zentralprojektion (punktuelle Lichtquelle) bieten durch Betrachtung des Schattenwurfes eine Vertiefung und Vernetzung der bisherigen Unterrichtsinhalte. Der Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge ermöglicht es, den Ort der Strahlenquelle zu variieren.

… Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	Das Gauß-Verfahren wird im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder wiederholt und vertieft. Die Studierenden sollen den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten anwenden können. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung wird stets deutlich. In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben. In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch heuristische Strategien und Vorgehensweisen aufgegriffen. Beispielsweise: • eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, • geometrische Hilfsobjekte einzuführen, • an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, • bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, • unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen. Abschließend nehmen die Studierenden eine Selbsteinschätzung ihrer Kompetenzen im Bereich der analytischen Geometrie vor und überprüfen sich anhand von komplexen Aufgaben.

Qualifikationsphase Leistungskurs Stochastik (S)

Thema: ***Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)***	**Thema 12** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ... Generieren von Zufallszahlen … Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten (Mittelwert, Standardabweichung) • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und	Im einführenden Teil dieses Unterrichtsvorhabens werden statistische Daten daraufhin untersucht, ob z.B. eine Annahme von gleichen Wahrscheinlichkeiten (Würfel) realistisch erscheint. Dabei wird der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der E-Phase wiederholt. Anhand von konkreten Beispielen werden die Begriffe des Erwartungswertes und der Varianz bzw. Standardabweichung eingeführt und deren Bedeutungen diskutiert. Je nach Größe der jeweiligen Stichprobe können die konkreten Berechnungen mit Hilfe des GTR erfolgen. Im zweiten Teil dieses Unterrichtsvorhabens liegt der Fokus auf Modellierung stochastischer Situationen. Dabei kann der Übergang von statistischen Werten (Häufigkeiten) zu Wahrscheinlichkeiten als Teil einer Modellierung interpretiert und diskutiert werden, wobei auch die Angemessenheit der Modellierung thematisiert werden sollte. Hier sollte als Vernetzung mit der Analysis die Wahrscheinlichkeitsverteilung als eindeutige Zuordnung thematisiert werden. Diese Funktionen werden in der Regel als Tabellen dargestellt und haben meistens keinen Funktionsterm. Die Frage nach fairen Einsätzen bei verschiedenen Glücksspielen motiviert die Einführung der Zufallsgröße und Untersuchung deren Erwartungswertes. Dabei kann auch die Abhängigkeit von den Annahmen der Modellierung diskutiert werden. Die Analogie zwischen dem Erwartungswert und dem Arithmetischem Mittel führt dazu, Varianz und Standardabweichung für Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zufallsgrößen zu betrachten. Anschließend können mit Hilfe des Erwartungswertes, der Varianz und der Standardabweichung Wahrscheinlichkeitsverteilungen verglichen und prognostische Aussagen getätigt werden.
Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus	

Thema: ***Treffer oder nicht? –Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)***		**Thema 13** (12 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • nutzen Binomialverteilungen […] zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Studierenden* • greifen auf Erfahrungen aus ihrer Berufswelt zurück, die sie reorganisieren und mit neuen Inhalten verknüpfen *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen,	Ein Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Für den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben eignet sich der Kontext von Prüfungsaufgaben, bei denen jeweils genau eine der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten richtig ist. In diesem Kontext führt die Frage nach dem Bestehen der Prüfung unter der Grundannahme, dass blind geraten wird, zu einer Bernoullikette, die für eine geringe Anzahl an Prüfungsfragen auf das Baumdiagramm als bekannte Vorgehensweise zurückgeführt werden kann. Die besondere Bedeutung der Unabhängigkeit für Bernoulliketten wird am Baumdiagramm entdeckt und für verschiedene Kontexte (z.B. Ziehen mit/ohne Zurücklegen) interpretiert. Die Binomialverteilung wird aus den Baumdiagrammen einer an Länge zunehmenden Bernoullikette entdeckt bzw. entwickelt. Dabei wird der Binomialkoeffizient als Anzahl der Pfade zunächst für kleine Zahlen, ausgehend vom Baumdiagramm, ermittelt und erkundet. Anschließend wird der Binomialkoeffizient kombinatorisch abgeleitet, begründet und in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel bestimmt. Bei der Erarbeitung des Binomialkoeffizienten und der Binomialverteilung können Aspekte des Problemlösens und insbesondere heuristische Strategien thematisiert und bewusst gemacht werden. Mit Hilfe der Binomialverteilung werden schließlich Problemstellungen in verschiedenen realen Kontexten und Spielsituationen bearbeitet und auch mit Hilfe des GTR gelöst. In diesem Rahmen können am Rande auch Fragen der Modellierung wiederholend aufgegriffen werden. Bei entsprechenden Problemstellungen werden auch kumulierte Wahrscheinlichkeiten eingeführt, verwendet und mit dem GTR berechnet. Verschiedene Lösungswege (zum Beispiel über die Gegenwahrscheinlichkeit) können verglichen und diskutiert werden. Bei der Diskussion der Modellierung in verschiedenen Kontexten werden auch die Grenzen des Modellierungsprozesses aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette

Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • ermitteln den Binomialkoeffizienten • berechnen Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	- die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Auch Beispiele der Modellumkehrung können betrachtet werden. („Von der Verteilung zur Realsituation“). *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung von binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*		**Thema 14** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**	

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Studierenden

- beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen
- nutzen die □-Regeln für prognostische Aussagen
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen

Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Studierenden

- analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
- erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)*
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Studierenden

- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
  … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
  … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungs-wert, Standardabweichung)
  … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und (auf erhöhtem Anforderungsniveau) normalverteilten Zufallsgrößen

Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR.

Nachdem der Einfluss der Parameter n und p visualisiert untersucht wurde, können begründete Vermutungen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung aufgestellt werden. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung exemplarisch für ein kleines festes n und ein beliebiges p durch Termumformungen bestätigt werden. Alternativ kann mit Hilfe von Tabellenkalkulation (zunächst festes n und p sowie Aufsummieren der quadratischen Abweichungen für alle k – dann systematische Variation von n und p) der Term für die Standardabweichung induktiv ermittelt werden.

Durch Erkundungen mit dem GTR wird das Konzept der □-Umgebungen entwickelt und in Kontexten für prognostische Aussagen genutzt.

Wenn der zeitliche Rahmen es zulässt kann darüber hinaus mit Hilfe der □Regeln der notwendige Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit bestimmt und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisiert werden.

Thema: *Der Alltag ist nicht immer diskret (Q-LK-S4)*	Thema 15 (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathem. Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Berechnen von Wahrscheinlichk. bei normalverteilten Zufallsgrößen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	Ausgehend von Alltagskontexten werden stetige Zufallsgrößen thematisiert. Der Übergang von diskreten zu stetigen Verteilungen mit der Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen, knüpft an die Histogramme von Binomialverteilungen mit großem n aus dem vorherigen Unterrichtsvorhaben an. Das Verständnis der Verteilungsfunktion als Integralfunktion wird somit über die Vernetzung mit der Analysis (Integral als Summe infinitesimaler Flächenstücke) angelegt. Kontexte mit annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen zur Thematisierung der Normalverteilung und zu Untersuchungen in diesen Sachbezügen. So eignet sich z.B. die Untersuchung von Augensummen von n Würfeln (Simulation mit Tabellenkalkulation) und deren Darstellung als möglicher Einstieg. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Berechnungen und Visualisierungen erfolgen mit dem GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann. Mit Hilfe des GTR können jedoch die Werte verschiedener bestimmter Intergrale bestimmt werden.

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)*	**Thema 16** (10 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Studierenden* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathem. Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar, *(Produzieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen zu bestimmen und mit diesem Wissen eine im Sachzusammenhang nachvollziehbare Entscheidung zu treffen. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Thema: ***Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)***	**Thema 17** (8 Std.)
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Studierenden* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Studierenden* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (*Mathematisieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*) ***Argumentieren*** *Die Studierenden* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (*Vermuten*) • stellen Zusammenhänge zwischen Sachsituationen und mathematischen Begriffen her (*Begründen*) • überprüfen, inwiefern Erkenntnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen*) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Studierenden* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Studierende modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Die tabellarische Darstellung der Übergänge in einem Prozessdiagramm führt in der verkürzten Schreibweise zu eine stochastischen Übergangsmatrix. Das ermöglicht z.B. Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen anhand der Matrixelemente. Im Rahmen der Berechnung des folgenden Zustandes wird ein System von Gleichungen entwickelt, das zur Matrix-Vektor-Darstellung führt und damit an die Matrix-Vektor-Schreibweise der linearen Gleichungssysteme anknüpft; insbesondere lassen sich damit auch vorangegangene Zustände ermitteln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Bei der Bestimmung der stabilen Verteilung können die näherungsweise Bestimmung mit Hilfe des GTR und die algebraische Bestimmung mit Hilfe von Gleichungssystemen als konkurrierende Lösungswege verglichen und diskutiert werden. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

… Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	

- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen - entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus	

2.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 14 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 15 bis 24 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze: vgl. Rahmenbedingungen

1) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
3) Medien und Arbeitsmittel sind erwachsenenspezifisch ausgewählt und auf die Erfahrungswelt der erwachsenen Lerner abgestimmt.
4) Die Studierenden erreichen einen Lernzuwachs.
5) Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Studierenden.
6) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Studierenden und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
7) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Studierenden.
8) Die Studierenden erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
9) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
10) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
11) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
12) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
13) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
14) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Studierenden.

Fachliche Grundsätze:

15) Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
16) Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
17) Die Bereitschaft zu problemlösendem Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
18) Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
19) Es wird Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
20) Durch regelmäßiges wiederholendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten „wachgehalten“.
21) Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben eingesetzt.

22) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
23) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
24) Digitale Medien werden dort eingesetzt, wo sie dem Lernfortschritt dienen.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 17 APO-WbK sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen:

- Die zweite Klausur im zweiten Semester und die zweite Klausur im vierten Semester werden parallel geschrieben. Die Fachkolleginnen und -kollegen sprechen sich im Vorfeld über Datum, inhaltlichen Umfang und Erwartungshorizont miteinander ab.
- Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- Alle Klausuren in der E-Phase sowie in Grund- und Leistungskursen der Q-Phase enthalten einen „hilfsmittelfreien“ Teil. Der Anteil des „hilfsmittelfreien“ Teils liegt innerhalb einer Spanne von 20 – 30 % des gesamten Klausurumfangs.
- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs bereits ab dem ersten Semester verwendet und mit den Studierenden sukzessive besprochen.
- Die Korrektur und Bewertung der Klausuren erfolgt anhand eines kriterienorientierten Bewertungsbogens, den die Studierenden als Rückmeldung erhalten.
- Studierenden wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes …) selbstständig vorzutragen.
- Studierende des Abendgymnasiums erhalten innerhalb der Woche keine Hausaufgaben.

Verbindliche Instrumente:

Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Semester. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-WbK § 18 (2))

**Die Fachkonferenz hat festgelegt, … **

Grundkurse Q-Phase 3. Semester:

dass alle Studierenden zwei Klausuren verbindlich mitschreiben. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-WbK § 18 (3)) **Grundkurse Q-Phase 4. Semester:**

dass alle Studierenden, die Mathematik als 3. oder 4. Abiturfach gewählt haben, zwei Klausuren verbindlich mitschreiben. Studierende, die Mathematik nicht als Abiturfach gewählt haben, sind zur Mitschrift der zweiten Klausur im Semester verbindlich verpflichtet. Dauer der Klausuren: 2 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-WbK § 18 (3)) **Grundkurse Q-Phase 5. Semester:**

dass alle Studierenden, die Mathematik als 3. oder 4. Abiturfach gewählt haben, zwei Klausuren verbindlich mitschreiben. Studierende, die Mathematik nicht als Abiturfach gewählt haben, schreiben keine Klausuren. Dauer der Klausuren: 2 bzw. 4 Unterrichtsstunden. (Vgl. APO-WbK § 18 (3))

- **Grundkurse Q-Phase 6. Semester:**
  dass alle Studierenden, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben, eine Klausur unter Abiturbedingungen (bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung) schreiben. Dauer der Klausuren: 3 Zeitstunden.

- **Leistungskurse Q-Phase 3.-5. Semester:**
  Zwei Klausuren je Semester. Dauer der Klausuren: 4 Unterrichtsstunden (Vgl. APO-WbK § 18 (3))
- **Leistungskurse Q-Phase 6.Semester:**
  Eine Klausur unter Abiturbedingungen (bzgl. Dauer und inhaltlicher Gestaltung). Dauer der Klausur: 4,25 Zeitstunden. (Vgl. APO-WbK § 18 (3))

Überprüfung der sonstigen Leistung

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Studierenden bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitstudierenden, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Umgang mit Arbeitsaufträgen
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung bei Referaten oder Plakaten und beim Vortrag von Lösungswegen Ergebnisse schriftlicher Übungen
- Anfertigen zusätzlicher Arbeiten, z.B. eigenständige Ausarbeitungen im Rahmen binnendifferenzierender Maßnahmen, Erstellung von Computerprogrammen

Übergeordnete Kriterien:

Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen den Studierenden transparent und klar sein. Die Fachkonferenz legt allgemeine Kriterien fest, die sowohl für die schriftlichen als auch für die sonstigen Formen der Leistungsüberprüfung gelten. Dazu gehört auch die Darstellung der Erwartungen für eine gute und für eine ausreichende Leistung.

Konkretisierte Kriterien:

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren in der Eingangs- und auch in der Qualifikationsphase erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind.

Dabei sind in der Qualifikationsphase alle **Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.**

Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 40% der Hilfspunkte erteilt werden. Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung (APO-WbK §17 (5)) angemessen erscheint.

Prozente	100 - 85	< 85 - 70	< 70 - 55	< 55 - 40	< 40 - 20	< 20 - 0
Note	1	2	3	4	5	6

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Studierenden zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente, sowie die Lernentwicklung mit in die Bewertung ein.

Kriterien zur Sonstigen Mitarbeit wurden in der Fachkonferenz zuletzt im September 2011 abgestimmt.

Kriterien zur Beurteilung des Leistungsbereichs

sonstige Mitarbeit

im Fach Mathematik

Die Fachschaft Mathematik orientiert sich bei der Beurteilung der Leistung im Bereich sonstige Mitarbeit an den Vorgaben zur Leistungsbewertung im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“, die am WbK Bonn zum WS 2016/2017 in Kraft getreten sind sowie an folgenden fachinternen Kriterien:

I. Beurteilungsrelevante Leistungen

Bewertet werden prinzipiell alle Leistungen, die nicht dem Bereich der Klassenarbeiten zuzurechnen sind. Entscheidend sind die **Qualität und die Kontinuität** der Unterrichtsbeiträge.

Diese können

- als mündliche Beiträge in Unterrichtsgesprächen und Gruppenarbeiten,
- als schriftlich Arbeiten in Übungs- oder Eigenarbeitsphasen oder
- in Form eines Vortrags abgeliefert werden. Bei der Bewertung mündlicher Beiträge im Unterrichtsgespräch ist auch der individuelle Lernfortschritt zu berücksichtigen.

1) In der **mündlichen** Mitarbeit im Unterricht sind u. A. zu bewerten:
   - Beiträge zum Unterricht in Form von Lösungsvorschlägen,
   - Erklärung bzw. Erläuterung von Zusammenhängen,
   - Plausibilitätsbetrachtungen von mathematischen Ergebnissen und/oder ihre Bewertung im Kontext,
   - Aufdecken von Widersprüchen und gedanklichen Fehlern,
   - Formulieren von reflektierten Fragen.

Qualität steht vor Quantität. Dies gilt auch für die sprachliche Qualität, wobei auch auf korrekte Fachsprache zu achten ist.

2) In der **selbständigen** Arbeit im Unterricht sind u. A. zu bewerten:
   - Bereithalten des notwendigen Materials,
   - mathematische Korrektheit und Strukturierung der schriftlichen Beiträge,
   - Zielstrebigkeit und Anstrengungsbereitschaft im Hinblick auf das gegebene Problem bzw. die gestellte Aufgabe,
   - Initiative und Übernahme von Verantwortung innerhalb einer Gruppe sowie Teamfähigkeit,

Die im Folgenden gelisteten Leistungen können, falls sie im Einzelnen erbracht worden sind, mit in die Beurteilung der Gesamtleistung eingerechnet werden:

3) Referate
   - schriftliche Vorlage,
   - Vortrag,
   - mathematische Korrektheit,
   - Strukturierung und Übersichtlichkeit der Darstellung
4) Leistungen in schriftlichen Übungen bzw. bei schriftlicher Abfrage der Hausaufgabe

Uneingeschränkt gilt, dass Studierende die Pflicht haben sich auf ihren Unterricht angemessen vorzubereiten (Hausaufgabe) und versäumten Lernstoff selbstständig bis zur nächsten Unterrichtsstunde nachzuarbeiten. Bei längeren Erkrankungen kann nach Absprache mit dem Fachlehrer eine längere, angemessene Zeit zur Nacharbeit eingeräumt werden.

Orientierungshilfe für mündliche Noten im Fach Mathematik

Kriterien: Der Studierende/ die Studierende	In Worten Note (Punkte)
• erfüllt die Anforderungen für die Note 2 und darüber hinaus: • argumentiert fast immer schlüssig und stimmig • zeigt mathematisches Verständnis auch im Zusammenhang mit Beweisführung und Beweisnotwendigkeit • entwickelt eigene Lösungswege und stellt sie dar	Leistung entspricht den Anforderungen in besonderem Maße 1 (13, 14, 15)
• kann aktuell erarbeitete Themengebiete und Strukturen sicher wiedergeben • kann vorgeschlagene Lösungswege umsetzen und manchmal Alternativen finden kann Transfer leisten • verwendet fachadäquate Darstellungsformen • argumentiert oft stimmig • liefert im Unterricht inhaltlich wertvolle Beiträge • kann sich mit anderen konstruktiv über mathematische Probleme austauschen kann gezielt Hilfen erfragen und umsetzen • bringt auch neue, brauchbare Ideen bei der Bearbeitung neuer Themen und Probleme ein	Leistung entspricht den Anforderungen voll 2 (10, 11, 12)

• kann einfache Aufgabenstellungen zu bereits erarbeiteten Themen sicher lösen • Kann Lösungswege einfacher Aufgaben weitgehend selbstständig beschreiben • kann einfache Zusammenhänge der aktuell behandelten Thematik richtig wiedergeben • kann mit Hilfestellung stimmig argumentieren • bringt seine/ihre Grundkenntnisse bei der Bearbeitung neuer Themen und Probleme	Leistung entspricht im Allgemeinen den Anforderungen 3 (7, 8, 9)
• kann einfache Wiederholungsfragen häufig richtig beantworten • kann einfache Zusammenhänge der aktuell behandelten Thematik meist richtig wiedergeben • kann geübte Aufgabentypen mit kleinen Hilfestellungen selbstständig lösen hat bei manchen Themen Lücken; diese scheinen in absehbarer Zeit behebbar • zeigt im Unterricht, dass er/sie bei der Bearbeitung neuer Themen und Probleme wesentliche Schritte aufnehmen kann	Leistung zeigt zwar Mängel auf, entspricht aber im Ganzen den Anforderungen. 4 (4, 5, 6)
• gibt häufig falsche Antworten • kann geübte Aufgabentypen oft nur mit Unterstützung lösen • hat auch bei einfacheren mathematischen Sachverhalten oft Verständnisschwierigkeiten	Leistung entspricht den Anforderungen nicht, lässt jedoch erkennen, dass die notwendigen Grundkenntnisse vorhanden sind und die Mängel in absehbarer Zeit behoben werden können. 5 (1, 2, 3)
• gibt fast immer falsche, unpassende oder gar keine Antworten • kann geübte Aufgabentypen nicht lösen	Leistung entspricht den Anforderungen nicht. Grundkenntnisse sind so lückenhaft, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können. 6 (0)

Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung:

Jeweils zum Quartalswechsel finden in den ersten beiden Semestern des Kollegs und Abendgymnasiums pädagogische Konferenzen zum Austausch aller Lehrkräfte einer Klasse statt, damit die Studierenden frühzeitig eine Rückmeldung bezüglich Leistung und Verhalten bekommen und hiervon ausgehend beraten werden können. Die Studierenden werden danach noch einmal in Einzelgesprächen über ihre Sonstige Mitarbeit und den aktuellen Leistungsstand individuell beraten. Die Studierenden können außerdem selbst Beratungsgespräche initiieren und je nach Anliegen bei den unterschiedlichen Personen des schulischen Beratungsmodells Hilfe holen.

2.4 Lehr- und Lernmittel

E-Phase:
Bigalke/Köhler OS NRW, E-Phase, Cornelsen Verlag

Q-Phase:

Bigalke/Köhler OS NRW, Q-Phase, Cornelsen Verlag
Fokus Mathematik LK, Cornelsen Verlag

Formelsammlung:
Formelsammlung Mathematik, Klett-Verlag

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Die Fachkonferenz hat in der Vergangenheit fächerübergreifende Methoden wie die Auswertung von Diagrammen für die anderen Fächer gemäß Methodencurriculum im 1. Semester eingeführt. Diese Verabredung muss nach Fertigstellung aller SILPs neu abgestimmt werden.

Alle Studierenden, die Mathematik als LK oder 3. Abiturfach gewählt haben, erhalten am Ende des 5. Semesters ein Abiturtraining.

Das Fach Mathematik kann auch als Projektkurs angewählt werden.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Durch Absprachen parallel unterrichtender Lehrkräfte, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

Das schulinterne Curriculum (siehe 2.1) ist zunächst bis 2017 für den ersten Durchgang durch die zum Abitur führenden Bildungsgänge des Weiterbildungskollegs nach Erlass des Kernlehrplanes verbindlich. Jeweils vor Beginn eines neuen Schuljahres, d.h. erstmalig nach Ende der Einführungsphase im Sommer 2016, werden in einer Sitzung der Fachkonferenz für die nachfolgenden Jahrgänge zwingend erforderlich erscheinende Veränderungen diskutiert und ggf. beschlossen, um erkannten ungünstigen Entscheidungen schnellstmöglich entgegenwirken zu können.

Nach Abschluss der Einführungsphase 2015 sowie nach Abschluss des Abiturs 2017 wird eine Arbeitsgruppe aus den beteiligten Lehrkräften auf der Grundlage ihrer Unterrichtserfahrungen eine Sichtung der Einführungsphase beziehungsweise eine Gesamtsicht des schulinternen Curriculums vornehmen und eine Beschlussvorlage für die nächste Fachkonferenz erstellen.